# 特殊函数 (三)

OnceBeta

2024 年 10 月 25 日

Email: OnceBeta@hotmail.com

---

本文为科普性文章，内容主要为采用积分、级数的方法对一些重要特殊函数的性质进行研究或讨论，背景知识的范围一般局限于初等数学、数学分析及复变函数论。此外，由于文章结构安排及篇幅长短问题，文中会对严谨性较高的内容进行一定压缩，只保留重要的技术细节。

这是该系列文章的第三卷，内容主要为贝塞尔函数，这类函数最早起源于对贝塞尔方程的研究，是一类非常重要的常微分方程，在物理学等其他自然科学学科中有十分重要的应用。这里主要对它们的定义和一些重要性质进行简单的介绍，并尽量还原它们在数学史上的一些细节。在最后的习题部分，我安排了一些简单的题目，内容均是与对应章节的内容相关的，读者可以通过它们检验自己对文章内容的掌握程度。

写在最后，笔者才疏学浅，行文略微仓促，如有谬误敬请指出。

---

OnceBeta 于上海市杨浦区
2024 年 10 月

# 目录



# 1 贝塞尔方程

## 1.1 定义

我们从所谓扩散方程 (Diffusion Equation) 开始我们的讨论。在应用数学中，所谓扩散方程是指具有如下形式的一类偏微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \Delta u$$

其中 $u = (x_1, \cdots, x_n, t)$。特别地，当 $n = 2$ 时称为二维扩散方程。

我们考虑在极坐标代换下，二维扩散方程会成为如下形式：

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

在圆形边界条件 $u(r = a) = 0$ 和初始条件 $u(t = 0) = \phi(r, \theta)$ 的前提下，上述方程变为：

$$u_t = \chi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

利用分离变量法，我们可以发现 $u$ 具有如下形式的通解：

$$u(r, \theta, t) = e^{in\theta} e^{-\chi t k^2} R(r)$$

其中 $R(r)$ 满足下面的常微分方程：

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \tag{1}$$

令 $z = kr$ 即得：

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dR}{dz}\right)+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)R=0 \tag{2}$$

上式就是著名的贝塞尔方程 (Bessel Equation)，其中常数 $n$ 称为方程的阶 (Order)。

### 1.2 幂级数解

可以验证，贝塞尔方程的一个特解是：

$$R(z) = C_1 z^n + C_2 z^{-n}$$

还可以发现，如果写 $R(z) = (z/2)^s F(z, s)$，可以得到 $F$ 满足下面的常微分方程：

$$F''(z) + \frac{2n+1}{z}F'(z) + F(z) = 0$$

上式的解可以通过下述的无穷级数表出：

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

其中系数为：

$$C_k = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}$$

## 2 贝塞尔函数

### 2.1 定义

贝塞尔函数 (Bessel Function) 被定义为贝塞尔方程的解，在上一章中，将系数 $C_k$，函数 $F(z, n)$ 的表达式代入到 $R(z)$ 当中，即可得到：

$$R(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

事实上，上式中阶数 $n$ 的值可以是任意实数 $s \in \mathbb{R}$。由此，我们便定义了贝塞尔函数：

**定义 1.** 对于 $z \in \mathbb{C}$ 和 $s \in \mathbb{C}$，$s$ 阶的贝塞尔函数定义为：

$$J_s(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(s+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{3}$$

### 2.2 积分表达式

考虑：

$$e^{iz\sin\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(iz\sin\theta)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k$$

此外，注意到对于 $k < 0$：

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k e^{-in\theta} d\theta = 0$$

然后，令 $p=n+q$，上式中的被积函数可被化为：

$$(\frac{1}{2\pi}e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k e^{-in\theta}=(1-e^{-2i\theta})^n(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^q$$

假设 $q$ 为奇数，上式右端第一个括号中所有项均为 $e^{i\theta}$ 的偶数次幂，而第二个括号则均为 $e^{i\theta}$ 的奇数次幂，则：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\theta-in\theta}d\theta=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{n+2k}e^{-in\theta}d\theta\right)$$

注意到：

$$(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{n+2k}\approx\frac{(n+2k)!}{k!(n+k)!}(e^{i\theta})^{n+k}(-e^{-i\theta})^k=\frac{(-1)^k(n+2k)!}{k!(n+k)!}e^{in\theta}$$

故：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{n+2k}e^{-in\theta}d\theta=\frac{(-1)^k(n+2k)!}{k!(n+k)!}$$

由此即可得到贝塞尔函数的积分表达式：

**定理 1.** 对于 $n>0$：

$$J_n(z)=A_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\theta-in\theta}d\theta \tag{4}$$

然后，再注意到贝塞尔函数在实数轴上取值均为实数，因此对上式取实部可得：

**定理 2.**

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(z\sin\theta-n\theta)d\theta \tag{5}$$

## 2.3 性质

$$J_s(z)\to\left(\frac{z}{2}\right)^s\frac{1}{\Gamma(s+1)} \tag{6}$$

$$J_{-s}(z)\to\left(\frac{z}{2}\right)^{-s}\frac{1}{\Gamma(-s+1)} \tag{7}$$

### 2.3.1 负整数阶贝塞尔函数

**定理 3.** 对于 $n\in\mathbb{Z}^+$：

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z) \tag{8}$$

### 2.3.2 半整数阶贝塞尔函数

**定理 4.** 对于 $n\in\mathbb{Z}^+$：

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z) \tag{9}$$

## 2.4 渐近行为

由贝塞尔函数的积分表达式，我们可以写：

$$\Phi(z,\theta) = z\sin\theta - n\theta$$

则：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\Phi(z,\theta)}d\theta$$

现考察当 $z\to\infty$ 时上式右边被积函数的行为，此时它将成为一个快速震荡的函数。具体地说，是在除了 $\frac{d\Phi}{dz}=0$ 的点外。这些 $\Phi(z,\theta)$ 的驻点由下式给出：

$$z\cos\theta = n$$

再注意到当 $z\to\infty$ 时，有：

$$\cos\theta = \frac{n}{z}\to 0$$

即

$$\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$$

考虑一个极小的 $\tau\to 0$：

$$\Phi(z,\theta)\approx z - \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}z\tau^2$$

故：

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}(e^{i(z-n\pi/2-\pi/4)})\int_{\infty}^{\infty} e^{-iz\tau^2/2}d\tau$$

作代换 $\tau\mapsto\sqrt{2/(iz)}t$，可得：

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 z}}\operatorname{Re}(e^{i(z-n\pi/2-\pi/4)})\int_{-(\pi/4)i\infty}^{(\pi/4)i\infty} e^{-t^2}dt$$

对于上式右边的积分，其积分路径由 $\infty$ 经第三象限沿着直线穿过原点再穿过第一象限回到 $\infty$，此即著名的高斯积分 (Gauss Integral)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi} \tag{10}$$

因此，我们事实上对不加限制的 $s\in\mathbb{C}$ 得到了如下的结果：

**定理 5.** 当 $z\to\infty$ 时：

$$J_s(z)\to\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi s}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{11}$$

特别地，我们有：

$$J_{\frac{1}{2}}(z)\to\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

由贝塞尔函数对三角函数的渐进行为，可知其在实数轴上有无穷多个零点，且随着 $z\to\infty$，$J_s(z)$ 相邻零点的间距会逐渐趋于 $\pi$。

## 2.5 正交性

对于 $k_1, k_2 > 0$，考虑下面的贝塞尔方程：

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_1}{dz}\right)+\left(k_1^2 z-\frac{\nu}{z}\right)\phi_1=0$$
$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_2}{dz}\right)+\left(k_2^2 z-\frac{\nu}{z}\right)\phi_2=0$$

容易验证二者的解分别为 $\phi_1(z)=J_\nu(k_1 z)$ 和 $\phi_2(z)=J_\nu(k_2 z)$。用 $\phi_2(z)$ 去乘前者，$\phi_1(z)$ 去乘后者再将两式相减可得：

$$(k_1^2-k_2^2)\phi_1(z)\phi_2(z)z=-\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_1}{dz}\right)\phi_2(z)+\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_2}{dz}\right)\phi_1(z)$$

在上式两端同时对 $z\in(0,l)$ 进行积分：

$$(k_1^2-k_2^2)\int_0^l \phi_1(z)\phi_2(z)zdz=-\int_0^l\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_1}{dz}\right)\phi_2(z)dz+\int_0^l\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_2}{dz}\right)\phi_1(z)dz$$

分部积分：

$$-\int_0^l\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_1}{dz}\right)\phi_2(z)dz+\int_0^l\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\phi_2}{dz}\right)\phi_1(z)dz=\left[-z\frac{d\phi_1}{dz}\phi_2(z)+z\frac{d\phi_2}{dz}\phi_1(z)\right]_0^l$$

如果 $\nu>1$，则上式右端的下极限等于 0，由此可得：

$$(k_1^2-k_2^2)\int_0^l \phi_1(z)\phi_2(z)zdz=-l\left.\frac{d\phi_1}{dz}\right|_{z=l}\phi_2(l)+l\left.\frac{d\phi_2}{dz}\right|_{z=l}\phi_1(l)$$

不失一般性地，令 $k_1=\mu_m/l, k_2=\mu_n/l$，即可得到：

$$\frac{\mu_m^2-\mu_n^2}{l^2}\int_0^l J_s\left(\mu_m\frac{z}{l}\right)J_s\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)zdz=\mu_n J_\nu(\mu_m)J'_\nu(\mu_n)-\mu_m J_\nu(\mu_n)J'_\nu(\mu_m)$$

接下来，只要令上式右端等于 0，就得到了贝塞尔函数的正交性。因此，我们有下述正交性定理：

**定理 6.** 对于 $n\in\mathbb{Z}^+$，令 $\mu_n$ 表示下列方程的正数根：

$$J_s(\mu)=0$$
$$J'_s(\mu)=0$$
$$alJ_s(\mu)+b\mu J'_s(\mu)=0, a,b\in\mathbb{R}$$

则对于 $m,n\in\mathbb{Z}^+$ 且 $m\neq n$：

$$\left\langle J_s\left(\mu_m\frac{z}{l}\right),J_s\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right\rangle=\int_0^l J_s\left(\mu_m\frac{z}{l}\right)J_s\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)zdz=0 \tag{12}$$

当 $m=n$ 时，上述积分不等于 0，正交关系不再成立。事实上，对于正交性条件的同一个解，我们有：

1. 对于 $J_\nu(\mu)=0$：
$$\|J_\nu\|^2=\left\langle J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right),J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right)\right\rangle=\frac{l^2}{2}J_{\nu+1}(\mu) \tag{13}$$

2. 对于 $J'_\nu(\mu)=0$：

$$\left\langle J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right), J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right)\right\rangle = \frac{l^2}{2}J_\nu(\mu) \tag{14}$$

3. 对于 $alJ_\nu(\mu)+b\mu J'_\nu(\mu)=0$：

$$\left\langle J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right), J_s\left(\mu\frac{z}{l}\right)\right\rangle = \frac{l^2}{2}\left((J'_\nu(\mu))^2+\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)\right) \tag{15}$$

# 3 其他类型的贝塞尔函数

## 3.1 修正贝塞尔函数

修正贝塞尔函数 (Modified Bessel Function) 是下述二阶常微分方程的解：

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dR}{dz}\right)-\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)R=0$$

上面的方程事实上可以由贝塞尔方程经代换 $z\mapsto iz$ 得到。

该方程的一个解可以由下述级数给出：

$$I_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{16}$$

在上式中将 $n$ 推广至一般的 $s\in\mathbb{C}$ 则得到修正贝塞尔函数的一般定义：

**定义 2.** 对于 $z\in\mathbb{C}$ 和 $s\in\mathbb{C}$，$s$ 阶的修正贝塞尔函数定义为：

$$I_s(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(k+s+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{17}$$

## 3.2 第二类贝塞尔函数和第三类贝塞尔函数

上文中所讨论的函数 $J_s(z)$ 是贝塞尔函数中最常用也是最重要的一类，因此又被称为第一类贝塞尔函数 (Bessel Function of the First Kind)，其他类型的贝塞尔函数都是由 $J_s(z)$ 发展而来的。

第二类贝塞尔函数 (Bessel Function of the Second Kind) 通常是指贝塞尔函数的线性组合：

$$N_s(z)=AJ_s(z)+BJ_{-s}(z) \tag{18}$$

容易发现由上式定义的 $N_s(z)$ 也是贝塞尔方程的一类解，且当 $z\to\infty$ 时满足：

$$N_s(z)\to\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi s}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{19}$$

第三类贝塞尔函数 (Bessel Function of the Third Kind)，又被称为汉克尔函数 (Hankel Function)，则是指贝塞尔函数的如下线性组合：

$$H_s^{(1)}(z)=J_s(z)+iN_s(z) \tag{20}$$

$$H_s^{(2)}(z)=J_s(z)-iN_s(z) \tag{21}$$

它在 $z \to \infty$ 时具有如下渐近行为：

$$H_s^{(1)}(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi s/2 - \pi/4)} \tag{22}$$

$$H_s^{(2)}(z) \to \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \pi s/2 - \pi/4)} \tag{23}$$

# 4 习题

**习题 1：**
证明贝塞尔方程 (2) 的一个特解为：

$$R(z) = C_1 z^n + C_2 z^{-n}$$

**习题 2：**
证明在对贝塞尔方程解的讨论中，阶数 $n$ 的值可以被替换为任意实数 $s \in \mathbb{R}$。
**习题 3：**
验证常微分方程

$$F''(z) + \frac{2s+1}{z} F'(z) + F(z) = 0$$

的幂级数解具有下述形式：

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

**习题 4：**
证明：对于 $n \in \mathbb{Z}^+$：

$$A_{-n}(z) = (-1)^n J(z)$$

**习题 5：**
考虑将 $e^{iz\sin\theta}$ 展开为傅里叶级数：

$$e^{iz\sin\theta} = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)(e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}) \tag{24}$$

并由此证明：

$$e^{(z/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \tag{25}$$

注意到上式表明 $e^{(z/2)(t-1/t)}$ 是贝塞尔函数的生成函数。
**习题 6：**
对于 $m \in \mathbb{Z}^+$，证明 $J_s(z)$ 在区间 $0 < z < (m + s/z + 1/4)\pi$ 上有 $m$ 个零点。
**习题 7：**
证明修正贝塞尔函数的积分表达式：

$$I_s(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(s\theta) e^{z\cos\theta} d\theta \tag{26}$$

**习题 8：**

证明：

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh(x\cos\theta)d\theta \tag{27}$$

$$I_1(z) = \frac{dI_0(z)}{dz} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh(x\cos\theta)d\theta \tag{28}$$

**习题 9：**

证明满足渐进 (19) 的第二类贝塞尔函数具有参数：

$$A = \tan(\pi s), B = \csc(\pi s)$$

**习题 10：**

第二类修正贝塞尔函数 (Modified Bessel Function of the Second Kind) 定义为：

$$k_s(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\pi s i/2} H_s^{(1)}(iz) \tag{29}$$

证明当 $z \to \infty$ 时：

$$k_s(z) \to \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \tag{30}$$