几个椭圆积分奇异值的初等计算方法

OnceBeta

2025 年 2 月 15 日

Email: OnceBeta@hotmail.com

前言

第一类完全椭圆积分的定义为：

$$K(k)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},K'(k)=K(\sqrt{1-k^2})$$

如果对于某个正整数 $n\in\mathbb{Z}^+$，有 $K(k_n)=\sqrt{n}K'(k_n)$，则我们称 $K(k_n)$ 和 $K'(k_n)$ 为椭圆积分奇异值。

下表给出椭圆积分的前五个奇异值中 k 的值：

表 1: 表 1

n	k_n
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	$\sqrt{2}-1$
3	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4	$3-2\sqrt{2}$
5	$\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}$

在本文中，我们将不加声明地使用上表中的数值，并利用初等方法计算出 $K(k_n)$ 和 $K'(k_n)$ 的值，这主要是通过构造一系列与 Gamma 函数和 Beta 函数相关的积分来实现的。

1 前置知识：Gamma 函数与 Beta 函数

在数学分析中，Beta 函数 (第一类欧拉积分) 是一个双变量函数，其定义如下：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

在上式右边的积分中作代换 $t\mapsto 1-t$ 很容易发现 Beta 函数对于其变量 x,y 是对称的，即：

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(y,x)$$

上式中在 Beta 函数和 Gamma 函数的关系可以通过在 Gamma 函数的积分定义中作换元 $x^2 \mapsto -\log x$ 证得。

2 几个积分的计算

在本节中，我们将利用 Gamma 函数与 Beta 函数表示几个定积分的值。

$$I_1 = \int_0^1 x^p(1-x^q)^r dx = \frac{1}{q}\int_0^1 x^{(p-q+1)/q}(1-x)^r dt = \frac{1}{q}B\left(\frac{p+1}{q}, r+1\right)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^\infty x^p(x^q-1)^r dx = \int_0^1 x^{-p-2}(x^{-q}-1)^r dx = (-1)^r\int_0^1 x^{-p-2}(1-x^{-q})^r dx \\ &= \frac{(-1)^{r+1}}{q}\int_0^1 x^{(p-q+1)/q}(1-x)^r dx = \frac{(-1)^{r+1}}{q}B\left(\frac{p+1}{q}, r+1\right) \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^p(x^q+1)^r dx$$

3 $K(k_1)$ 和 $K'(k_1)$ 的计算

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, K(k_1) = K'(k_1) = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{\pi}}$$

解：令

$$t = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$$

则：

$$K(k_1) = K'(k_1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-t^2/2}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

4 $K(k_2)$ 和 $K'(k_2)$ 的计算

$$k_2 = \sqrt{2}-1, K(k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}K'(k_2) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}\Gamma(1/8)\Gamma(3/8)}{2^{13/4}\sqrt{\pi}}$$

解：令

$$t = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}x$$

则：

$$K(k_2) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(3-2\sqrt{2})t^2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{x^4-4x^2+2}}$$

另一方面，令：

$$t = \frac{x}{\sqrt{x^2+2-\sqrt{2}}}$$

则：

$$K'(k_2)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(2\sqrt{2})t^2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+2}}$$

代换：

$$x\mapsto\frac{2x}{\sqrt{x^4-4x+2}}$$

可以证明：

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+2}}=\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\frac{dx}{\sqrt{x^4-4x^2+2}}$$

在上式左端的积分中作换元

$$x=u-\frac{1}{u}$$

可得：

$$\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4+4x^2+2}}=\int_1^\infty\frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^8}}du=\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{u^8+1}}$$

5 $K(k_3)$ 和 $K'(k_3)$ 的计算

$$k_3=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},K(k_3)=\frac{1}{\sqrt{3}}K'(k_3)=\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(1/3)}{4\sqrt[4]{3}\sqrt{\pi}}$$

解：令

$$t=\frac{2x}{x^2+1}$$

则：

$$\begin{aligned}K(k_3)&=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}t^2}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^4+\sqrt{3}x^2+1}}=\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4+\sqrt{3}x^2+1}}\\&=\sqrt[4]{3}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4+3x^2+3}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+3x^2+3x}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K'(k_3)&=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}t^2}}=2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^4-\sqrt{3}x^2+1}}=\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4-\sqrt{3}x^2+1}}\\&=\sqrt[4]{3}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^4-3x^2+3}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3-3x^2+3x}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\int_{-1}^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}\\&=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\left(\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}+\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}\right)\end{aligned}$$

6 $K(k_4)$ 和 $K'(k_4)$ 的计算

$$k_4=3-2\sqrt{2},K(k_4)=\frac{1}{\sqrt{4}}K'(k_4)=\frac{(\sqrt{2}+1)\Gamma^2(1/4)}{8\sqrt{2\pi}}$$

解：令

$$t=(\sqrt{2}+1)x, z=\frac{2x}{1-x^2}$$

则：

$$K(k_4)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(17-12\sqrt{2})t^2}}=(\sqrt{2}+1)\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$
$$=2\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{dx}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}$$

另一方面，令

$$t=\frac{x}{\sqrt{x^2+3-2\sqrt{2}}}, z=\frac{2x}{1+x^2}$$

则：

$$K'(k_4)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-(12\sqrt{2}-16)t^2}}=(\sqrt{2}+1)\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4+6x^2+1}}$$
$$=(\sqrt{2}+1)\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

7 $K(k_5)$ 和 $K'(k_5)$ 的计算

$$k_5=\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}, K(k_5)=\frac{1}{\sqrt{5}}K'(k_5)=\frac{\sqrt[4]{50+22\sqrt{5}}\Gamma(3/20)\Gamma(7/20)}{8\sqrt{5\pi}}$$

解：令

$$t=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

则：

$$K(k)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}=\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1-k^2}}$$

令

$$x=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}z^2-\sqrt[4]{\sqrt{5}-2}}{2z}$$

则：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}}=2\sqrt[4]{2+\sqrt{5}}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^4+4z^2+2+\sqrt{5}}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}}}=2\sqrt[4]{2+\sqrt{5}}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^4-4z^2+2+\sqrt{5}}}$$

在上式中作变换：

$$z\mapsto\frac{z^5+(5+\sqrt{5})z^3+(5+2\sqrt{5})z}{\sqrt{5}z^4+(5+\sqrt{5})z^2+2+\sqrt{5}}$$

可得：

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^4-4z^2+2+\sqrt{5}}}=\sqrt{5}\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{z^4+4z^2+2+\sqrt{5}}}$$

在上式右边令

$$z = u - \frac{1}{u}$$

可得：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^4+4z^2+2+\sqrt{5}}} &= \int_1^\infty \frac{u^2+1}{\sqrt{u^8+\sqrt{5}u^4+1}}du = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^8+\sqrt{5}u^4+1}} \\ &= 5^{3/8}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^8+5u^4+5}} = \frac{5^{3/8}}{2}\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^5+5u^3+5u}}\end{aligned}$$

令

$$u = v - \frac{1}{v}$$

整理可得：

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u^5+5u^3+5u}} = \int_1^\infty \frac{v^{5/2}+v^{1/2}}{\sqrt{v^{10}-1}}dv$$